



## 44. IWASA

Internationales Wasserbau-Symposium  
Aachen 2014

**Wasserbauliches Versuchswesen –  
Aus Anlass der Neuen Wasserbauhalle  
des IWW**

9. und 10. Januar 2014



# Vergleich unterschiedlicher Modellansätze für die Simulation von Strömungsvorgängen in der Wasserwirtschaft

Raju M. Rohde

## Abstract

Development and application of software has greatly changed in recent decades due to greater computing power and due to the availability of reusable code. Hence, there is a great variety of very different models for the simulation of flow processes in water resources management to choose from. A comparison of models is difficult and rarely conducted. The cost of data acquisition and the calibration of the parameters for the different models must be considered. For the assessment of the model quality and for the analysis of the model results and their restrictions the experienced user is of significant importance. Finally, the model with the smallest error is the best.

## Zusammenfassung

Durch die leichte Verfügbarkeit von wieder verwendbarem Code und größerer Rechnerleistungen hat sich die Softwareentwicklung und Softwareanwendung in den letzten Jahrzehnten stark verändert und zur Entwicklung einer Vielzahl von sehr unterschiedlichen Modellen zur Simulation von Strömungsprozessen in der Wasserwirtschaft geführt. Eine Vergleichbarkeit von Modellen ist oft nur bedingt möglich. Insbesondere ist der Aufwand der Datenbeschaffung und der Kalibrierung der Parameter für die unterschiedlichen Modelle zu berücksichtigen. Letztlich ist für die Einschätzung der Modellgüte und für die Beurteilung der Modellergebnisse und deren Restriktionen die Erfahrung des Anwenders von ausschlaggebender Bedeutung. Schließlich ist das Modell am besten, das den geringsten Modellfehler aufweist.

## 1 Einleitung

Die numerische Simulation ist im Allgemeinen eine Möglichkeit zur Analyse von Systemen, die für die theoretische oder formelmäßige Behandlung zu komplex sind. Sie hat zum Ziel, Erkenntnisse über das reale System zu gewinnen. Dies ist überwiegend bei dynamischen Systemen gegeben, die durch Systeme von zeitlich und räumlich abhängigen partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden, die nicht explizit gelöst werden können. Simulationsmodelle finden Verwendung bei einer Vielzahl von wasserwirtschaftlichen Studien, insbesondere bei der Untersuchung von durch ihr dynamisches Systemverhalten gekennzeichneten Strömungsvorgängen. Der vorliegende Bei-

trag wird sich deshalb schwerpunktmäßig auf diese Systeme beschränken, die in folgenden Anwendungsbereichen der Wasserwirtschaft zu finden sind:

- Gewässermodellierung (Wasserspiegelberechnung, Wasserqualitätssimulation, Wellenberechnungen)
- Kanalnetzmodellierung (Kanalnetzauslastung, Schmutzfrachtberechnung, Druckstoßberechnung)
- Grundwassermodellierung (Wasserströmung, Schadstofftransport)

Für den Vergleich unterschiedlicher Modelle und insbesondere für die Beurteilung von Aufwand und Aussagekraft gibt es sowohl für Entwickler als auch für Anwender unterschiedliche Gründe.

Den Entwickler interessiert der Vergleich neuer Konzepte mit bereits marktführenden Modellen, um Entscheidungen über die Neu- oder Weiterentwicklung zu treffen.

Den Anwender beschäftigen Fragen zum Wechsel zu neuen Modellen aufgrund von Unzufriedenheit (z. B. hohe Wartungskosten) oder anders gestellter Aufgabenstellungen. Auftraggeber beschränken bei der Fortsetzung von Projekten aufgrund neuer Daten (z. B. Einzugsgebietsdaten, Regendaten, Messdaten) die Modellauswahl auf ein bestehendes Modell, was für den Ingenieur eventuell eine Beschränkung der potentiellen Auftraggeber bedeutet.

Bei der Softwareentwicklung der Modelle ist dabei von Bedeutung, dass seit den 70er Jahren, wo viele der heute noch benutzten Programmsysteme entstanden sind, sowohl bei Stil wie Aufwand der Programmierung grundlegende Veränderungen zu vermerken sind:

- 1970er: Strukturierte Programmierung  
Unterprogramme (Subroutines), Blöcke (Block Structures), For- und While-Schleifen etc. Beispiel: Fortran, Pascal,
- 1990er: Objekt Orientierte Programmierung (OOP)  
Einführung sogenannter Objekte, bestehend aus Datenfeldern und Methoden, die aus Klassen erzeugt werden; gute Wiederverwendbarkeit von Klassen durch Bibliotheken ist gegeben;
- Aktuell: Spezielle Softwarepakete (z. B. Matlab)  
Speziell für Ingenieure entwickelte Programme zur Lösung mathematischer Probleme und zur grafischen Darstellung der Ergebnisse, z. B. mit Hilfe von Matrizen; Probleme werden implizit formuliert und vom Programm gelöst; in C und Fortran geschriebene freie Bibliotheken wie z. B. LAPACK und BLAS sind zusätzlich verfügbar.

## 2 Numerische Modellierungsmethoden

### 2.1 Numerische Lösungsverfahren

Zu lösen sind i. Allg. Partielle Differentialgleichungen, z. B. St.-Venant'sche Gleichungen, mittels Gitterverfahren (Euler-Verfahren) oder Lagrange-Verfahren:

- Finite Differenzen (Gitter-Verfahren)

Die zu lösende partielle Differentialgleichung zur Beschreibung der Strömungsprozesse wird durch Differenzenquotienten in Raum und Zeit angenähert, z. B.:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} \qquad \frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1}$$

- Finite Elemente Methode (Gitter-Verfahren)

Der Lösungsraum wird in Finite Elemente aufgeteilt. Durch Einführung einer Näherungslösung, einer Integration über das Gebiet und der Einführung des Differenzverfahrens erhält man ein lineares Gleichungssystem für jeden Zeitschritt.

- Charakteristiken-Verfahren (Lagrange-Verfahren)

Virtuelle Partikel (Position/Schadstoffkonzentration) werden im Modellgebiet verteilt und entlang der Geschwindigkeitsverteilung verschoben. Für jede Gitterzelle wird anschließend die Konzentration als Mittelwert aller in der Zelle befindlichen Partikel berechnet.

### 2.2 Kriterien bei der numerischen Modellierung

Die Güte und Aussagensicherheit von numerischen Simulationen werden i. Allg. nach der Erfüllung folgender Kriterien beurteilt:

- Konsistenz

Konsistenz drückt aus, dass sich die diskrete Gleichung der Differentialgleichung annähert, falls  $\Delta x \rightarrow 0$  und  $\Delta t \rightarrow 0$ .

- Stabilität

Ein stabiles Differenzenschema verhindert das grenzenlose Anwachsen von Fehlern im Verlauf der Berechnung.

- Konvergenz

Die diskrete Lösung  $U_i^n$  nähert sich der exakten Lösung  $U(x,t)$  der Differentialgleichung an für jeden Punkt  $x_i = i \Delta x$  und jeden Zeitpunkt  $t_n = n \Delta t$ , falls  $\Delta x \rightarrow 0$  und  $\Delta t \rightarrow 0$ .

- Äquivalenztheorem von Lax

Für ein korrekt gestelltes Anfangswertproblem und eine konsistente Diskretisierung ist Stabilität eine notwendige und hinreichende Bedingung für Konvergenz.

- Courant-Kriterium

Entscheidend bei der inkrementellen Lösung von Differentialgleichungen ist der Grad der raumzeitlichen Diskretisierung ( $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ), ausgedrückt durch die Courant-Zahl, die angibt, um wie viele Zellen sich eine betrachtete Größe pro Zeitschritt maximal fortbewegt:

$$C = (|v| + c) \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

mit

$v$  = Fließgeschwindigkeit

$c$  = Wellengeschwindigkeit

$\Delta t$  = der diskrete Zeitschritt und

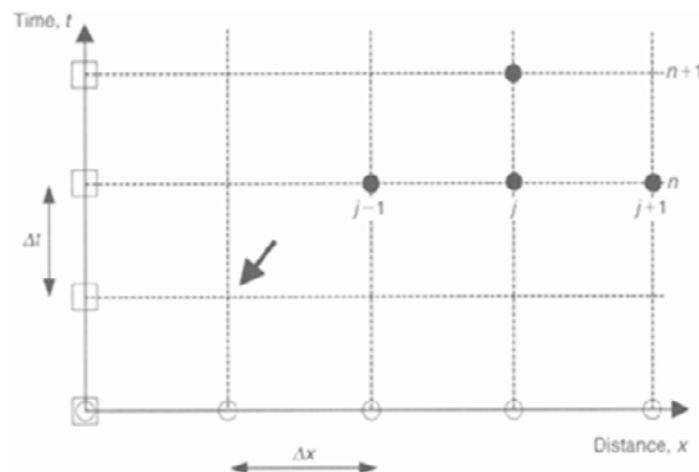
$\Delta x$  = der diskrete Ortsschritt

### 2.3 Explizite und Implizite Modellierung

Bei der inkrementellen Lösung von Differentialgleichungen unterscheidet man hinsichtlich der Zeitdiskretisierung die sogenannte „Explizite Modellierung“ von der „Impliziten Modellierung“.

- Explizite Modellierung

Bei der Lösung der partiellen Differentialgleichung kann der Funktionswert des neuen Zeitwerts ( $n+1$ ) abhängig von der Lösung des alten Zeitpunkts ( $n$ ) formuliert werden. Somit können im Zeitschritt  $\Delta t$  unabhängige Differentialgleichungen aufgestellt werden, was i. Allg. einfach zu programmieren ist. Dieses Lösungsverfahren unterliegt allerdings u. a. dem Courant'schen Stabilitätskriterium, z. B. bei der Wahl der Zeitschrittlänge. Die Stabilität ist nur für kleine Courant-Zahlen ( $C < 1$ ) gegeben.



- Implizite Modellierung

Dieses Verfahren erfordert die Lösung eines Systems von abhängigen Differentialgleichungen, da die Lösung im aktuellen Zeitschritt (n+1) von unbekanntem Funktionswerten aus dem aktuellen Zeitpunkt (n+1) abhängig ist. Die Notwendigkeit zur iterativen Lösung dieses Gleichungssystems in jedem Zeitschritt führt zu größerem Programmieraufwand, erlaubt aber u. a. die Wahl von größeren Zeitschritten.

### 3 Beispiel 1: Implizite hydrodynamische Kanalnetz-Berechnung

Am Beispiel der hydrodynamischen Kanalnetzberechnung lassen sich die Vorteile der impliziten Modellierung etwa wie folgt zusammenfassen:

- Keine Beschränkung der Länge der Berechnungsstrecken und der Zeitschritte durch das numerische Verfahren, d. h. Courant'sche Stabilitätskriterium ist irrelevant;
- keine „Näherungslösungen“ (wie etwa der sogenannte Preissmann-Schlitz) nötig für den Abfluss unter Druck (eingestautes Netz, Düker),
- Genauigkeit der Volumenbilanz < 0,1%,
- keine arbeitsaufwendigen und fehleranfälligen „Netzvereinfachungen“,
- unveränderte (1:1) Übernahme der tatsächlichen Netzdaten aus der Datenbank.

### 4 Beispiel 2: Stofftransportmodellierung im Grundwasser

Der advektive Stofftransport bedeutet die Ausbreitung einer Störung entlang charakteristischer Bahnlinien, d. h. nur in eine Raumrichtung. Diese Art Gleichungen lässt sich numerisch am besten mit sogenannten Lagrange oder Particle-Tracking-Verfahren lösen (z. B. Charakteristikenmethode, Random-Walk-Verfahren). Gittermethoden, insbesondere das Implizite Verfahren sind hierfür weniger gut geeignet. Das Kriterium zur Bewertung der numerischen Dispersion ist die dimensionslose Gitter-Peclet-Zahl:

$$Pe_g = \frac{\Delta x}{\alpha_L}$$

mit

$\alpha_L$  = Dispersivität

$\Delta x$  = Gitterweite

### 5 Beispiel 3: Hydrologische NA-Modellierung

In Flussgebietsstudien verwendete Niederschlag-Abfluss-Modelle verzichten weitgehend auf strenge mathematisch-physikalische Ansätze und beschreiben die physikalischen Teilprozesse (z. B. Niederschlag, Verdunstung, Interception, Infiltration, Inter-

flow, Grund-, Oberflächen- und Gerinneabfluss etc.) durch räumlich vertikal und horizontal zugeordnete Black-Box-Modelle. Hierbei handelt es sich i. d. R. um reine, nur empirisch begründete Input-Output Modelle, deren innere Funktion durch Konzepte wie lineare/nicht-lineare Filter oder in neuerer Zeit auch durch KN-Ansätze (künstlich-neuronal) und unscharfe (Fuzzy-) Prozessbeschreibungen angenähert werden.

Im Gegensatz dazu werden hydrodynamische (nicht-hydrologische) Oberflächenabfluss-Modelle z. B. bei der Ermittlung des Zuflusses für das Kanalnetz angewendet. Hier werden die Fließvorgänge mathematisch-physikalisch durch die Kontinuitäts- und die St.-Venant'schen Gleichungen beschrieben und numerisch gelöst. Die anzusetzenden Modellparameter (z. B. Neigung, Gefälle, Fließlänge) sind dabei i. d. R. nicht mit den Parametern der hydrologischen Modellierung (z. B. Abflussbeiwert) vergleichbar.

## 6 Modellanwendung

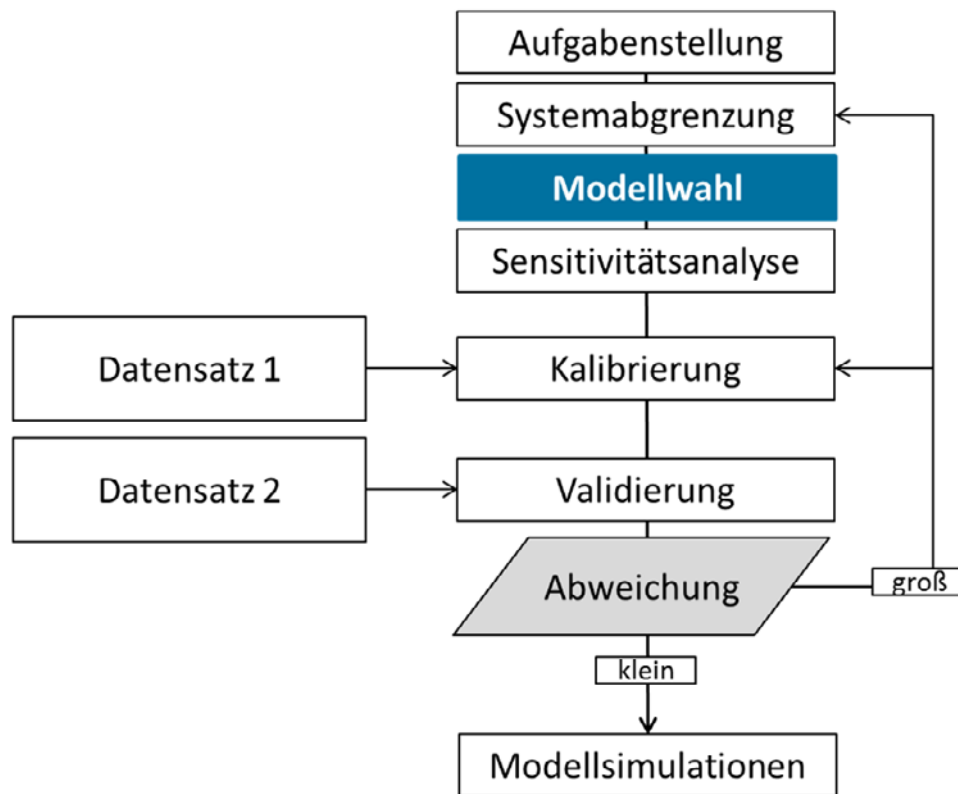
Der erste Schritt einer Simulation ist die Modellfindung. Wird ein neues Modell entwickelt, spricht man von Modellierung. Ist ein vorhandenes Modell geeignet, um Aussagen über die zu lösende Problemstellung zu machen, müssen lediglich die Parameter des Modells neu eingestellt werden.

Bei der Anwendung von Modellen sind dann – in Abhängigkeit von Modelltyp und Aufgabenstellung mit unterschiedlicher Intensität – i. Allg. folgende Arbeitsschritte durchzuführen:α

- Systemabgrenzung  
zur Festlegung von Bereich, Umfang und Bearbeitungstiefe der zu simulierenden Prozesse,
- Sensitivitätsanalyse  
zur Abschätzung des Einflusses der Modellparameter auf das erwartete Simulationsergebnis,
- Kalibrierung  
zur Anpassung der Modellparameter mit dem Ziel einer möglichst guten Annäherung der Simulationsergebnisse an vorliegende Messergebnisse,
- Inverse Modellierung  
bei einigen wenigen Modellen besteht die Möglichkeit durch wiederholte Reproduktion der beobachteten Größen die Kalibrierung zu automatisieren;
- Validierung  
Nachweis der Reproduzierbarkeit von Beobachtungsdaten durch Simulation mittels des kalibrierten Modells. Wie in der Abbildung dargestellt, handelt es sich grundsätz-



lich um eine iterative Vorgehensweise, die erst dann abgeschlossen werden kann, wenn die Modelvalidierung zufrieden stellende Ergebnisse zeigt.



### **Anschrift des Verfassers**

Dr. Raju M. Rohde  
 Lahmeyer Hydroprojekt GmbH  
 Elsenheimerstr. 11  
 80687 München